TD cours : algèbre linéaire

29 novembre 2018

1 Systèmes libres, bases

1.1

Soit A une partie génératrice de l'espace vectoriel de dimension finie E. Montrer que A contient une partie-base.

1.2

[(i)] Soit $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une famille de polynômes. Si la suite $(\deg P_k)$ est strictement croissante, montrer que la suite (P_k) est libre, et que c'est une base si pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\deg P_k = k$.
[(ii)] Déterminer une base de $\mathbf{K}[X_1, \cdots, X_n]$.
[(iii)](X^n) est-elle une base de $\mathbf{K}[[X]]$?
[(iv)] Déterminer une base de $\mathbf{R}(X)$.

1.3

Soit E un sev de $\mathbf{R}_n[X]$. Montrer que E possède une base dont tous les éléments sont de même degré (resp. de degrés différents).

1.4

Soit $f : x \to \ln(1+x)$, montrer que la famille f^{op}, $p \in \mathbf{N}^*$ est libre dans $F(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+)$.

1.5

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et D une matrice diagonale de $M_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que $(I, D, \ldots, D^{n-1})$ est une base de $D'_n\mathbf{K})$.

1.6

Montrer que $X^k(1-X)^{n-k})$, $k = 0, \ldots, n$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

2 Sous-espaces vectoriels, sommes

2.1

Soit F un sev strict de l'espace vectoriel E. Déterminer les $u \in L(E)$ qui sont nuls sur $E \setminus F$.

2.2

Soient F et G deux sous-espace vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel, alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2.3

Soit E l'espace vectoriel de fonctions continues $2-\pi$ périodiques de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$.
a) Montrer que l'espace vectoriel F des fonctions de E possédant une primitive est un hyperplan.
b) Donner un supplémentaire du sev de F formé par les fonctions qui s'annule en 0 et en π.

2.4

Soit $\mathbf{K}$ un corps infini. On suppose que F est un sous-espace vectoriel strict de E non trivial. Montrer qu'il admet une infinité de supplémentaires.

2.5 Utile

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, espace vectoriel de dimension finie, avec $\dim F = \dim G$. Montrer que F et G possèdent un supplémentaire commun.

2.6

On suppose $\mathbf{K}$ fini :

$$|\mathbf{K}| = q = p^r \text{ avec } p \text{ premier.}$$

(Justifier)
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Dénombrer :
[(i)] $|E|$.
[(ii)] m étant donné, le nombre de systèmes libres de E de taille m.
[(iii)] Le nombre de bases de E.
[(iv)] Le nombre d'hyperplans de E.

3 Applications linéaires, Théorème du rang

3.1

A un n-uple $x = (x_1, ..., x_n)$ d'éléments du K-espace vectoriel E on attache le sous-espace vectoriel L_x de $\mathbf{K}^n$ formé des $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tels que $\sum \lambda_i x_i = 0$. Soit

$y = (y_1, ...y_n) \in E^n$. Montrer qu'il existe une application linéaire u de E dans E telle que $u(x_i) = y_i$ pour tout i ssi $L_x \subset L_y$.

3.2

Rappeler et démontrer le théorème du rang.

3.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'inégalité :

$$|\mathrm{rg} u - \mathrm{rg} v| \leq \mathrm{rg}(u - v)$$

3.4 Utile

Soit A une K-algèbre intègre unitaire (en rappeler la définition). Est-elle un corps ? Qu'en est-il si A est de dimension finie ?

3.5

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie sur un corps fini F_q. Calculer $|\mathcal{GL}(\mathcal{E})|$.

3.6

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker} u \iff \mathrm{Im} u \cap \mathrm{Ker} v = \{0\}$$

$$\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im} v \iff \mathrm{Im} u + \mathrm{Ker} v = E$$

3.7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$\mathrm{Ker} u = \mathrm{Ker} u^2 \iff \mathrm{Im} u = \mathrm{Im} u^2$$

3.8

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(u + v) \leq \dim(\mathrm{Ker} u \cap \mathrm{Ker} v) + \dim(\mathrm{Im} u \cap \mathrm{Im} v)$.

3.9

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. CNS pour que

$$\forall v \in L(\mathbb{R}), u \circ v = 0 \Rightarrow v \circ u = 0.$$

3.10 uov et u+v

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur u pour qu'il existe $v \in L(E)$ tel que $uov = 0$ et $u + v$ inversible. $\mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}\,u$ E

4 Interpolation polynomiale

4.1

(Interpolation de Lagrange) Soit $(x_i)_{i=1}^n \in \mathbf{K}^n$ deux à deux distincts. Montrer :

$$\forall (y_i)_{i=1}^n \in \mathbf{K}^n,\ \exists! P \in \mathbf{K}_{n-1}[X],\ \forall i \in \{1;\cdots;n\},\ P(x_i) = y_i$$

généralisation interpolation de Cauchy

Expliciter alors ce polynôme.

4.2

(Inverse de la matrice de Vandermonde) Déterminer l'inverse d'une matrice de Vandermonde de paramètres $(x_i)_{i=1}^n$.

5 Homothéties, projecteurs, involutions

5.1

(Lemme de Schur) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$\exists \lambda \in \mathbf{K},\ u = \lambda Id_E \iff \forall x \in E,\ (x, u(x)) \text{ est liée.}$$

5.2

(Caractérisation des homothéties) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 3$. Soit $p \in \{2, \cdots, n-1\}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout sous-espace F de E :

$$\dim F = p \implies F \text{ stable par } u$$

Que dire de u ?

5.3

(Caractérisation des projecteurs) Soient E un espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $p \circ p = p$, alors $\mathrm{Ker}p \oplus \mathrm{Im}p = E$ et p est la projection de E sur $\mathrm{Im}P$ parallèlement à $\mathrm{Ker}p$.

5.4

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ et soit p un projecteur. Montrer l'équivalence :

$$p \circ v = v \circ p \iff v\langle \mathrm{Ker}p \rangle \subset \mathrm{Ker}p \text{ et } v\langle \mathrm{Im}p \rangle \subset \mathrm{Im}p$$

5.5

Soient $(p,q) \in \mathcal{L}(E)^2$ un couple de projecteur sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec la caractéristique de $\mathbb{K}$ différente de 2. Montrer l'équivalence :

$$p+q \text{ projection} \iff p \circ q = q \circ p = 0$$

5.6

.Soit E un espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E tels que $f+g = Id$ et rg $f+$ rg $g \leq n$. Montrer que f et g sont deux projecteurs associés.

Familles de projecteurs

exos Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de de dimension finie, et $p_1, \ldots, p_k$ des endomophismes de E, Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

1) Il existe une famille $(F_i)_{1\leq i\leq k}$ de sev supplémentaires de E telle que, pour tout indice i, p_i soit le projecteur sur F_i parallélement à $\oplus_{i\neq j} F_j$;

2) $p_1 + \cdots + p_k = Id_E$, et pour tout indices $i \neq j$ on a $p_i \circ p_j = 0$.

5.7

(Symétries) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec la caractéristique de $\mathbb{K}$ différente de 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$u^2 = Id_E \iff u$est une symétrie par rapport à Ker$(u - Id_E)$ de directionKer$(u + Id_E)$

Donner un contre-exemple lorsque la caractéristique de $\mathbb{K}$ est égale à 2.

5.8

On suppose $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ une involution. Montrer que pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$:

$$u \circ v = v \circ u \iff v \text{ laisse } \mathrm{Ker}(u - Id_E) \text{ et } \mathrm{Ker} u + Id_E) \text{ stables.}$$

5.9 Bicommutant.

Soient T et T' deux involutions d'un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n. Déterminer le commutant de T. On suppose que T et T' commutent. Déterminer le bicommutant de (T, T').

6 Nilpotents

6.1

(Noyaux itérés) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note, avec la convention $u^0 = Id_E$:

$$F_k = \mathrm{Ker} u^k$$

$$G_k = \mathrm{Im} u^k$$

Montrer :

i) $F_{k+1} = F_k \iff G_{k+1} = G_k$ et dans ce cas :

$$\forall l \geq k,\ F_l = F_k \text{ et } G_l = G_k$$

ii) Il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que :

$$F_0 \subset\neq F_1 \subset\neq \cdots \subset\neq F_p = F_{p+1}$$

$$G_0 \supset\neq G_1 \supset\neq \cdots \supset\neq G_p = G_{p+1}$$

et $F_p \oplus G_p = E$.

$E \subset \mathrm{Im}\, u + S$

$\mathrm{Im}\, u + S \supset \mathrm{Im}\, u + u^{2}(S) = E$

6.2

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ un endomorphisme nilpotent d'indice p de E, où E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

a) Soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre.

b) On suppose que $p = n$. Montrer que $Com(u) = \mathbf{K}[u]$.

$\mathrm{Vect}(E + \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}\, u^2 + \ldots \mathrm{Im}\, u^{p-1})$

6.3

Soient E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme nilpotent de E, S un sev de E stable par u. Si $E = S + Im(u)$ montrer que $S = E$.

7 Structures réelles et complexes

7.0.1

Montrer que toute application $\mathbf{R}$-linéaire de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ se met sous la forme $z \to az + b\overline{z}$, $a, b \in \mathbf{C}$.

7.1

Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Montrer que E peut être muni d'une structure complexe compatible avec sa structure réelle ssi sa dimension est paire.

7.2

Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soit $u \in L(E)$.
a) On suppose ici que $u^2 = -Id_E$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est formée de blocs diagonaux égaux à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}.$$

b) On suppose ici que $u^2 + au + bId_E = 0$ avec $a^2 - 4b < 0$. Montrer qu'il existe des réels α et β et une base de E dans laquelle la matrice de u est formée de blocs diagonaux égaux à $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

7.3

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $E = \mathbf{C}^n$ que l'on identifie naturellement à $\mathbf{R}^{2n}$. Montrer que, pour tout hyperplan réel H de E il existe et de façon unique un hyperplan L de $\mathbf{C}^n$ qui est inclus dans H.

7.4

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $E = \mathbf{C}^n$ que l'on identifie naturellement à $\mathbf{R}^{2n}$. Soit $u \in L(E)$, $\mathbf{C}$ - linéaire. Comparer le déterminant de u pour les structures réelle et complexe de E.

8 Extensions de corps, éléments algébriques

8.1

Soient $\mathbf{K}$ un corps commutatif et $\mathcal{A}$ une K-algèbre associative et unitaire. Pour $a \in \mathcal{A}$, on définit l'application (où $a^0 = 1_{\mathcal{A}}$) :

$$\Phi : \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k \in \mathbf{K}[X] \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k$$

Montrer :

(i) Φ est un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbre. On note I_a son noyau, c'est un idéal de $\mathbf{K}[X]$. $\mathbf{K}[a] = \mathrm{Im}\Phi$ est une (la plus petite contenant a) sous-algèbre de $\mathcal{A}$.

(ii) I_a est non nul $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{K}[a]$ est de dimension finie. Dans cas, si μ_a est le générateur normalisé de I_a :

$$\dim \mathbf{K}[a] = \deg \mu_a$$

8.2

Soient $\mathcal{A}$ une $\mathbf{K}$-algèbre intègre, unitaire, associative et $a \in \mathcal{A}$. Montrer l'équivalence :

$$I_a = \mathrm{Ker}\Phi \neq \{0\} \iff \mu_a \text{ est irréductible et } \mathbf{K}[a] \text{ est un corps.}$$

8.3

Montrer que $P = X^3 + X - 1$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$, et qu'il possède une et une seule racine β réelle. Déterminer alors $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}[\beta]$.

8.4

Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ algébrique sur $\mathbf{Q}$. Soit P son polynôme minimal. On note β une racine de P. Montrer que $\mathbf{Q}[\alpha]$ et $\mathbf{Q}[\beta]$ sont isomorphes.

8.5

Base télescopique Soient $K \subset L \subset M$ trois sous-corps de $\mathbf{C}$. On suppose que L est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et M un L-espace vectoriel de dimension finie p. Montrer que L est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dmension finie np.

8.6

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbf{K}$-algèbre unitaire, associative, intègre, commutative. Pour $a \in \mathcal{A}$, si $I_a \neq \{0\}$, a est dit *algébrique*. Montrer que les éléments algébriques de $\mathcal{A}$ constituent un sous-corps de $\mathcal{A}$.